Die mit Sternchen (*) gekennzeichneten Aufgaben sind besonders schöne und lehrreiche Aufgaben des jeweiligen Themas.
Bei Zeitmangel sollte man mindestens diese Aufgaben lösen!

Zahlenfolgen

Rekursive Zahlenfolgen

1. Zeige, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_{n+1} = 2a_n + na_n \quad a_1 = 5$$

streng monoton wachsend ist. Wie sieht es aus für $a_1 = -1$?

2. Prüfe, ob die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_{n+1} = a_n - na_n \quad a_1 = 3$$

monoton ist. Entscheide, ob die Zahlenfolge konvergent ist (kein Beweis erforderlich). Gib, falls die Zahlenfolge konvergent ist, den Grenzwert an!

3.* Die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} \qquad a_1 = 2$$

ist monoton fallend. Zeige, dass sie nach unten beschränkt ist und begründe anschließend, dass die Zahlenfolge konvergent ist. Berechne den Grenzwert!

4. Zeige, dass die rekursiv definierte Fibonacci-Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_1 = 1, a_2 = 2$$

monoton wachsend ist. Zeige weiter, dass sie nicht nach oben beschränkt ist.

5. Zeige mit vollständiger Induktion, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 6} - 1 \qquad a_1 = 1$$

monoton wachsend und beschränkt ist. Welche weitere Eigenschaft folgt daraus?

Zahlenfolgen

„normale“ Folgen

Untersuche die Folge (a_n) (siehe 1-6) auf Konvergenz!

1. $a_n = \dfrac{2 - n + 4n^4}{n + 2n^2 + 2n^4}$

2. $a_n = \left(100 + \frac{1}{n}\right)^2$

3. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

4.* $a_n = n\left(1 - \sqrt{(1 - \frac{a}{n})(1 - \frac{b}{n})}\right)$ (Tipp: Der Grenzwert ist $\frac{a+b}{2}$)

5. $a_n = \dfrac{1 + 2 + ... + n}{n+2} - \frac{n}{2}$ (Tipp: Kennst du eine Formel, um $1 + 2 + ... + n$ geschickt auszurechnen?)

6. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ (Tipp: Zeige beschränkt und monoton)

Gleichungen und Ungleichungen

(Un)gleichungen mit komplexen Zahlen

Bestimme grafisch alle komplexen Zahlen z, die die folgenden Gleichungen/Ungleichungen erfüllen!

1.* $|z+3| = 2$

2. $|z+3i| \leq 2$

3. $|z-3| < 2$

4.* $|z-(2i-1)| > 1$

5. $|z-2i| = 2 = |z+2|$

6.* $|z-2i| = |z+2|$

7. $|z-2i| \leq |z+2|$

8.* $|4i-z-4| < |z|$

9. $|\frac{z+1}{z-2i}| = 1$

(Un)gleichungen mit reellen Zahlen

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Gleichungen/Ungleichungen erfüllen.

1. $-3x+2 < 6x$

2. $x^2 - 8 \leq 2x$

3.* $|x-3| + |x+2| = 3x$

4.* $\frac{x-3}{x-2} < 6$

5. $\frac{|x+5|}{|x-2|} < 6$

6. $|3x+15| < 2$

Funktionen

Erste Mathe Nacht

1. Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ \alpha x + (1 - \alpha) & x > 1 \end{cases}$$

Untersuche f in Abhängigkeit von α auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1$.

2. Für festes $\beta \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ \beta^x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

Untersuche f in Abhängigkeit von β auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1$.

3.* Für festes $\gamma \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \cos(x^\gamma) & x > 0 \end{cases}$$

Untersuche f in Abhängigkeit von γ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

4. Für festes $\delta \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{(x+1)^\delta} & x > 0 \end{cases}$$

Untersuche f in Abhängigkeit von δ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

Reihen

„normale“ Reihen

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

1.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

3.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

4.* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$

5.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+5}$

Folgende Reihen konvergieren. Bestimme ihren Wert!

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ (Tipp: Beweise induktiv: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$)

8.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

Reihen

Reihen mit Taylor

Folgende Reihen konvergieren. Bestimme ihren Wert!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

   Tipp: Taylor: $\ln(1+x)$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

   Tipp: Taylor: $\arctan x$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$.

   Tipp: Taylor: $\cos x$

Potenzreihen

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}x^n$

Reihen zum Knobeln

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$

Stammfunktionen

Bestimme folgende Stammfunktionen

1. $\displaystyle\int 2x \, \arctan x \, \mathrm{d}x$

   Tipp: Substituieren.

2. $\displaystyle\int x \, \ln x \mathrm{d}x$

3.* $\displaystyle\int 8x \, e^{x^2} \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int x \, \cos x \mathrm{d}x$

5.* $\displaystyle\int e^x \, \cos x \mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \mathrm{d}x$

   Tipp: Substitution mit einer trigonometrischen Funktion.

7.* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} \mathrm{d}x$

8.* $\displaystyle\int x \, \sin(x^2) \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \arcsin x \mathrm{d}x$

   Tipp: Doppelte Substitution.

10. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \mathrm{d}x$

    Tipp: Substituiere $y = \frac{1}{x}$.

Vollständige Induktion

Beweise durch vollständige Induktion!

1. Die Fibonacci-Zahlen $F_n, n \in \mathbb{N}$ sind durch folgende Vorschrift festgelegt:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ und } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$

b) $F_n F_{n+2} + (-1)^n = F_{n+1}^2$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

3.* Die Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch

$$a_n = 3a_{n-1} + 1,\ a_0 = 1$$

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

Beweise

Beweise die folgenden Aussagen.

1. (a_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert.

2. Wenn a_n gegen a und $b_n - a_n$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch b_n gegen a.

3. Es sei (d_k) eine Folge in $[0, \infty)$ so, dass $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ divergiert. Beweise oder widerlege (mit einem Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

   a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{1+d_k}$ ist konvergent.

   b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{1+k^2 d_k}$ ist konvergent.

4. Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall $I := (-r, r) (r > 0)$ differenzierbar, es sei $f(x)g(x) = x$ auf I und $f(0) = 0$. Zeige, dass $g(0) \neq 0$ sein muss.

5.* f und g seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Ferner sei $f(a) = g(a)$ und $0 \leq f'(x) < g'(x)$ auf (a, b). Dann ist $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$.